EXERCICE N°4 : 25' 4 points

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$. **1) a)** Etudier les variations de g.

b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet dans $]-\infty, 3[$ une solution unique α et que $\alpha \in]0.7, 0.8[$.

c) Déterminer le signe de g.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = (x+1)\ln|x-3|$. **a)** Etudier les variations de f.

b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de C_f et l'axe des abscisses.

c) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{(\alpha+1)^2}{3-\alpha}$ et tracer C_f.

EXERCICE N°5 : 30' 5 points

f et g définies sur $[0, +\infty[$ $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ et $g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) a) Etudier les variations de g.

b) Calculer g(0) et en déduire que pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ et $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

c) Déduire que f est dérivable en 0.

3) Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$.

a) Déterminer le signe de h sur $[0, +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Etudier la position de C_f et la droite Δ : tg en 0. tracer C_f et Δ.

EXERCICE N°6 : 30' 5 points

Soit $\alpha \in]1, +\infty[$, on considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = u_n^{2^n}$. **b)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$. En déduire que $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\alpha - 1)$.

d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 2^n (u_n - 1)$.

a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{(1-u_n)^2}{2} \leq \ln(u_n) - u_n + 1 \leq 0$ puis que :

$-2^{n-1}(1-u_n)^2 \leq \ln(\alpha) + 2^n(1-u_n) \leq 0$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{2^{n+1}}(\alpha-1)^2 \leq \ln(\alpha) - v_n \leq 0$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn